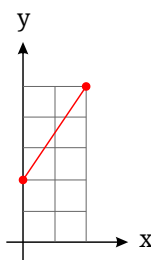
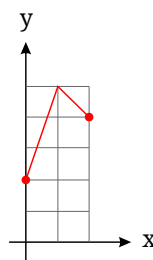


۱ نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ را رسم کنید:
الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.
ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.
پاسخ:

الف)



ب)



۲ حاصل عبارت های زیر را حساب کنید.

$$[300, 4002]$$

$$[-103, 003]$$

$$[-2309, 54]$$

پاسخ:

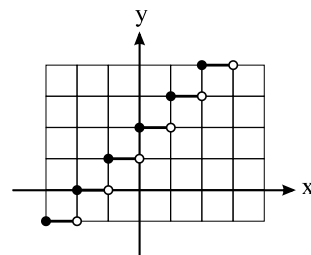
$$[300, 4002] = 300$$

$$[-103, 003] = -104$$

$$[-2309, 54] = -2310$$

۳ تابع با ضابطه $f(x) = [x + 2]$ و دامنه $D = [-3, 3]$ را رسم کنید.
پاسخ:

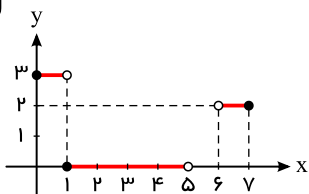
$$\begin{aligned} f(x) &= [x + 2] = [x] + 2 \\ -3 \leq x < -2 &\rightarrow [x] = -3 \rightarrow f(x) = -1 \\ -2 \leq x < -1 &\rightarrow [x] = -2 \rightarrow f(x) = 0 \\ -1 \leq x < 0 &\rightarrow [x] = -1 \rightarrow f(x) = 1 \\ 0 \leq x < 1 &\rightarrow [x] = 0 \rightarrow f(x) = 2 \\ 1 \leq x < 2 &\rightarrow [x] = 1 \rightarrow f(x) = 3 \\ 2 \leq x < 3 &\rightarrow [x] = 2 \rightarrow f(x) = 4 \end{aligned}$$



۴ تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5) \\ 2 & x \in [6, 7) \end{cases}$$

پاسخ:



۵ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$

الف) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow D_f = D_g$

$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = g(x)$

ب) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

$D_f = \mathbb{R}$, $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

 $\rightarrow D_f \neq D_g \rightarrow$ دو تابع برابر نیستند

ب) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

پاسخ:

 ۶ دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$ را به دست آورید.

پاسخ:

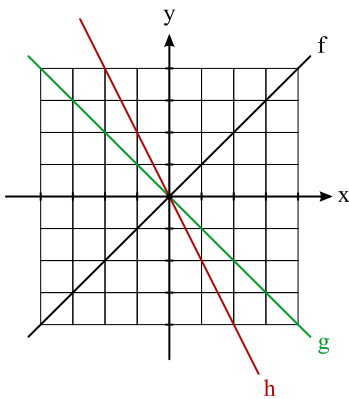
$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

 ۷ تابعی گویا بنویسید که دامنه اش برابر $\mathbb{R} - \{-1\}$ شود.

پاسخ:

$f(x) = \frac{vx}{x + 1}$

۸ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آن‌ها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



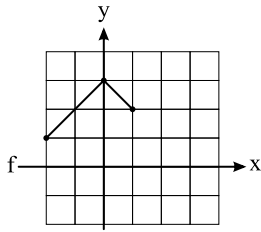
پاسخ:

$f(x) = x$, $g(x) = -x$, $h(x) = -2x$

$\rightarrow -x = x + (-2x) \rightarrow g(x) = f(x) + h(x)$

$g(x) = (f + h)(x)$

۹ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

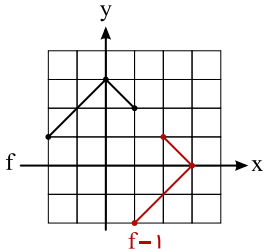


پاسخ:

$$(-2, 1) \in f \rightarrow (1, -2) \in f^{-1}$$

$$(0, 2) \in f \rightarrow (2, 0) \in f^{-1}$$

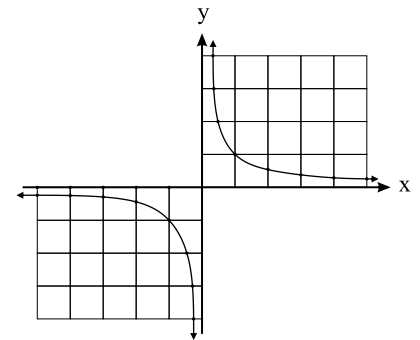
$$(1, 1) \in f \rightarrow (1, 1) \in f^{-1}$$


 ۱۰ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ و با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ را رسم کنید.

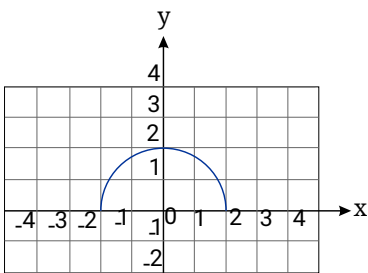
پاسخ:

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$...
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	...

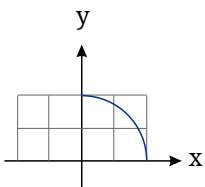
x	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...



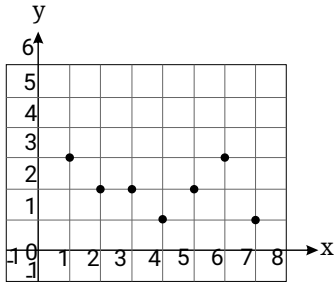
۱۱ با حذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



پاسخ:



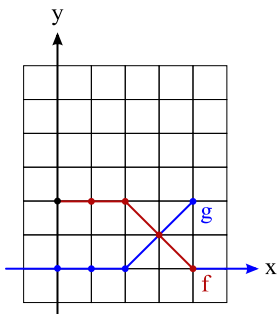
۱۲ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟



پاسخ:

حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند.

۱۳ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.

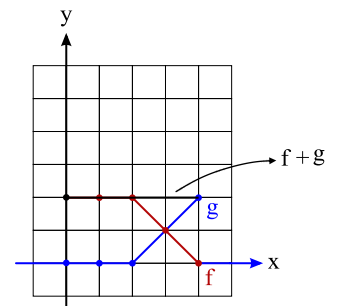


پاسخ:

$$f = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$$

$$g = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$\rightarrow f + g = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$$



۱۴ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

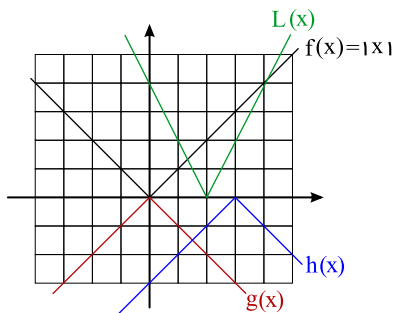
الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$

ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$

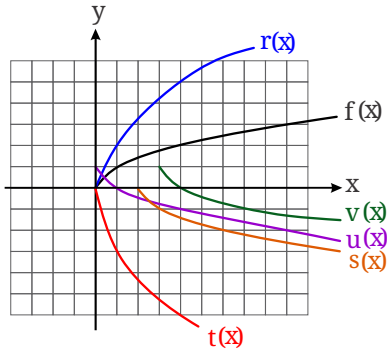
پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$

ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

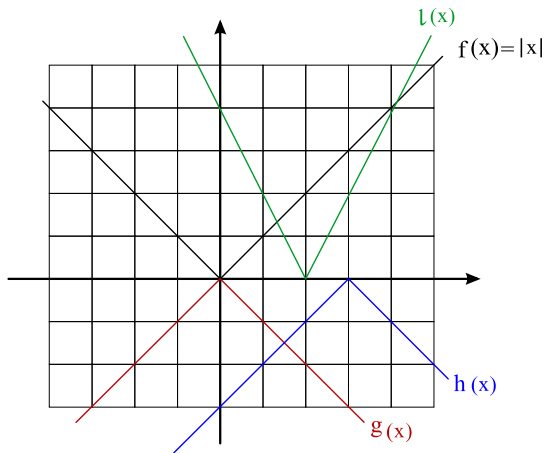


پاسخ:


 ۱۵ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x - 3|$ پ) $l(x) = 2|x - 2|$

پاسخ:



۱۶ ضابطه وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 5x - 2$

ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$

پ) $f(x) = \frac{-7x + 3}{5}$

پاسخ:

الف) $f(x) = 5x - 2 \rightarrow y = 5x - 2 \rightarrow y + 2 = 5x \rightarrow x = \frac{y + 2}{5}$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y + 2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{5}$$

ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4 \rightarrow y = \frac{3}{5}x + 4 \rightarrow y - 4 = \frac{3}{5}x \rightarrow x = \frac{5(y - 4)}{3}$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \frac{5(y - 4)}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5(x - 4)}{3}$$

پ) $f(x) = \frac{-7x + 3}{5} \rightarrow y = \frac{-7x + 3}{5} \rightarrow 5y = -7x + 3$

$$\rightarrow 7x = -5y + 3 \rightarrow x = \frac{-5y + 3}{7} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{-5y + 3}{7} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-5x + 3}{7}$$



۱۷ وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را بدست آورید.

پاسخ:

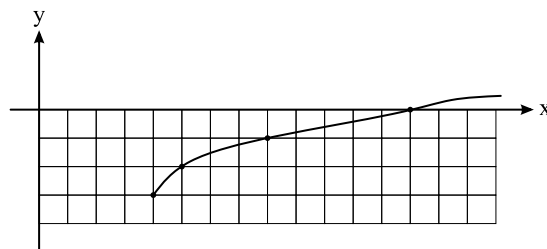
$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$$

۱۸ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

پاسخ:

$$g(x) = -3 + \sqrt{x-4} \rightarrow x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \rightarrow D_g = [4, +\infty)$$

x	y
4	-3
5	-2
8	-1
13	0



۱۹ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق در تابع داده شده را بیابید.

پاسخ:

الف

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

پاسخ:

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{matrix} \rightarrow D_{f \cap g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x| + \frac{1}{x}, \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = |x| - \frac{1}{x}, \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = |x| \times \frac{1}{x} = \frac{|x|}{x}, \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{\frac{1}{x}} = x|x|, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0\} - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

ب

$$f(x) = x^r - 4$$

$$g(x) = x + 2$$

پاسخ:

$$f(x) = x^r - 4 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x + 2 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^r - 4 + x + 2 \rightarrow (f+g)(x) = x^r + x - 2, \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^r - 4 - (x + 2) \rightarrow (f-g)(x) = x^r - x - 6, \quad D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^r - 4)(x + 2) \rightarrow (f \cdot g)(x) = x^r + 2x^r - 4x - 8, \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^r - 4}{x + 2} \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^r - 4}{x + 2}, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

پ

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = -\sqrt{x}$$

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow D_f = [0, +\infty) \rightarrow D_f \cap D_g = [0, +\infty)$$

$$g(x) = -\sqrt{x} \rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0 \rightarrow (f+g)(x) = 0, \quad D_{f+g} = [0, +\infty)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} \rightarrow (f-g)(x) = 2\sqrt{x}, \quad D_{f-g} = [0, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \times (-\sqrt{x}) = -x \rightarrow (f \cdot g)(x) = -x, \quad D_{f \cdot g} = [0, +\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1 \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -1, \quad D_{\frac{f}{g}} = (0, +\infty)$$

ت

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 10$$

پاسخ:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5\} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 10 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-2}{x+5} + x^2 + 3x - 10, \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-2}{x+5} - (x^2 + 3x - 10), \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{x+5} (x^2 + 3x - 10), \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-2}{x+5}}{x^2 + 3x - 10}, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-5\} - \{x | g(x) = 0\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-5\} - \{2, -5\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2, -5\}$$

ث

$$g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$$

پاسخ:

$$g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\} \rightarrow D_g = \{-1, 0, 2, 3\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\} \rightarrow D_f = \{2, 3, 0\}$$

$$f+g = \{(0, -2+3), (2, 5+4), (3, 4+0)\} \rightarrow f+g = \{(0, 1), (2, 9), (3, 4)\}$$

$$f-g = \{(0, -2-3), (2, 5-4), (3, 4-0)\} \rightarrow f-g = \{(0, -5), (2, 1), (3, 4)\}$$

$$f \cdot g = \{(0, -2 \times 3), (2, 5 \times 4), (3, 4 \times 0)\} \rightarrow f \cdot g = \{(0, -6), (2, 20), (3, 0)\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(0, \frac{-2}{3}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right), \left(3, \frac{4}{0}\right) \right\} \rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ \left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right) \right\}$$